

Θέματα Άλγεβρας Α' Λυκείου

Θέμα 1ο

α. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$a \cdot x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \qquad a \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Μονάδες 7 + 8

β. Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ).

1. Αν n περιττός και $a < 0$, τότε η εξίσωση $x^n - a$ είναι αδύνατη.
2. Αν $\gamma < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 - bx + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνωτες ρίζες.
3. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\lambda \cdot x = \lambda$ έχει τουλάχιστον μια λύση.
4. Αν $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$, τότε η εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 είναι η:

$$x^2 + Sx + P = 0.$$
5. Η εξίσωση $(\alpha + \beta)x^2 - \alpha x - \beta = 0$ έχει ρίζα το 1.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση:

$$\Pi = \frac{3x^3 - 5}{x^2 - x} - \frac{2}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 10

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο προηγούμενο ηρώτημα, να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{3x^2 - 5}{x^2 - x} = \frac{2}{1 - x}$$

Μονάδες: 12

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες: 8

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), τότε:

i. Να γράψετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 - x_2$ ως συνάρτηση του λ .

Μονάδες: 3

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{|x_1 + x_2 + 3\lambda - 8| - 5}{5} + 3 = \frac{|x_1 - x_2 + \lambda + 3| + 3}{2}$$

Μονάδες: 12

Θέμα 4ο

Θα θεωρήσουμε την εξίσωση:

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες: 7

β. Να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες: 6

γ. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της (1).

i. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$|x_1 - x_2| < 4.$$

Μονάδες: 6

ii. Να δείξετε ότι:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 \cdot x_2)^2 + 1.$$

Μονάδες: 6

28/3/2021